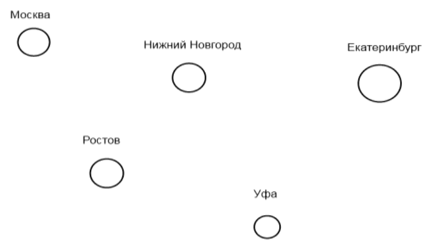
Урок №10 «Определения и примеры графов»

Теория графов берет свое начало еще в 18 веке, когда Эйлер написал свою знаменитую статью о Кёнигсберских мостах (это мы рассмотрим чуть позже). Сейчас достижения теории графов **применяются** в строительстве, программировании, электротехнике, социологии, экономике, биохимии, телекоммуникациях и планировании транспортных коммуникаций, психологии и т.д.

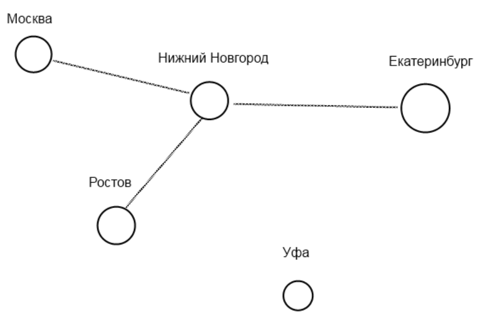
Графы – замечательные математические объекты, с их помощью можно решать очень много различных, внешне не похожих друг на друга задач. В математике существует целый раздел – теория графов, который изучает графы, их свойства и применение. Мы же обсудим только самые основные понятия, свойства графов и некоторые способы решения задач.

Тема графов — это интересная, полезная и пугающая тема. Теория графов — "Ужас студента".
Алгоритмы на графах — потрясающий ум людей их открывших.
Что такое граф?
Граф — это множество объектов.
В большинстве задач это однотипные объекты. (Множество городов или множество домов, или множество людей, или множество чего-то ещё однотипного)
Чтобы решать задачи с таким множеством, нужно каждый объект из этого множества обозначить как что-то. Общепринято это самое что-то называть вершинами графа.
Описывать графы и основные определения удобно рисунками.
Проще всего приводить пример на городах.



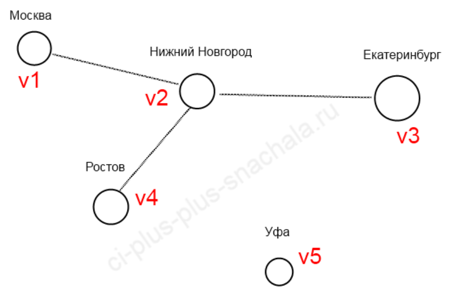
МНОЖЕСТВО ОБЪЕКТОВ-ГОРОДОВ = ГРАФ

Каждый из нас знает, что такое город и что такое дорога. Каждый из нас знает, что к городу могут быть дороги, а могут и не быть. В общем, любое множество объектов можно охарактеризовать как граф.



Каждый из множества объектов может быть соединен с другим, но и не соединен
Тем не менее - это граф

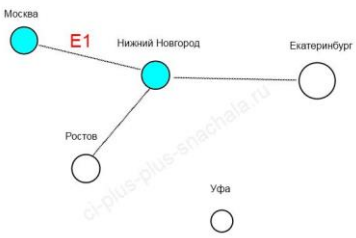
Если говорить о графе как о городах, то между городами могут быть проложены дороги, а может быть где-то разрушена, не построена, или же город вообще находится на острове, моста нет, а интересуют только дороги с твердым покрытием. Несмотря на то, что дороги к такому городу нет, этот город может быть включен во множество анализируемых объектов, и все объекты вместе взятые составляют совокупность объектов или, проще говоря, — граф.



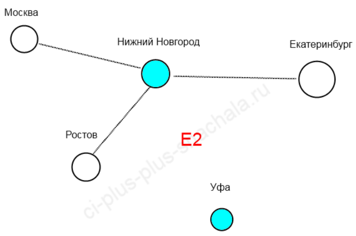
Каждый город - это вершина графа
и обычно обозначается как V

Наверняка вы читали учебники и видели такую запись G(V,E) или что-то похожее. Так вот, V — это какой-то один объект из всего множества объектов. В нашем случае множество объектов — это города, следовательно, V — это какой-то определенный город. Так как объекты не обязательно города, а слово объект может запутать, то такой объект из множества можно называть точкой, пунктом, как-то еще, но чаще всего его называют вершиной графа и обозначают буквой V.

В программировании это обычно или столбец или строка двумерного массива, где массив называется или матрицей смежности или матрицей инцендентности.

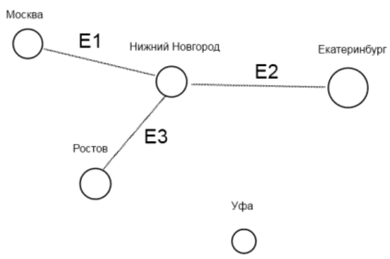


ПАРА ВЕРШИН ОБОЗНАЧАЕТСЯ КАК E



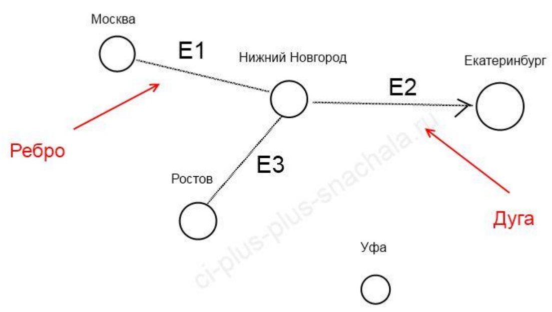
ПАРА ВЕРШИН ОБОЗНАЧАЕТСЯ КАК E

E обычно называют пару вершин. В двумерном массиве этой парой часто выступают номер строки + номер столбца. По номеру строки и номеру столбца проверяют соединение, и если оно есть на пересечении, то это обозначают в значениях массива (матрицы) в месте пересечения строки и столбца



Если вершины соединены какой-то связью, например дорогами - то об этих связях говорят, что это дуги или ребра

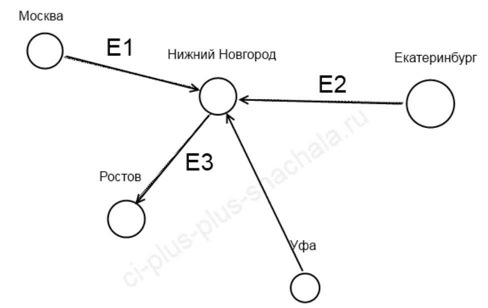
В литературе, в интернете и вообще везде, где что-то написано о графах, вы будете встречать такие понятия, как дуги и ребра. На этом рисунке изображены ребра графа. Т.е. это три ребра E1, E2 и E3.



Про ребра говорят, что они соединяют вершины

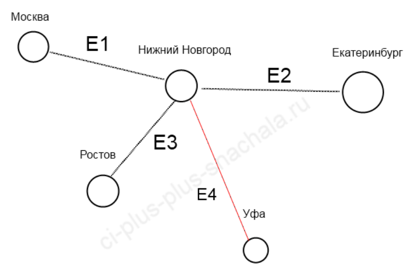
Про дуги говорят, что дуга начинается в одной вершине и заканчивается в другой

Дуга и ребро отличаются тем, что ребро – это такая двунаправленная связь. Захотел, ушёл к соседу, захотел, вернулся от соседа. Если не очень понятно, то можно представить дом, аэродром, летящий самолёт и парашютиста. Парашютист может пойти из своего дома на аэродром, вспомнить, что свой счастливый парашют забыл дома, вернуться домой, взять парашют. Такая дорога, по которой можно гулять туда и обратно, называется ребром. Если же парашютист находится в самолёте и прыгает из самолёта, но…парашютист забыл в самолёте надеть свой счастливый парашют, то сможет ли парашютист забрать, что забыл? Такой путь, который идёт только в одну сторону, называется дугой. Обычно говорят, что ребро соединяет вершины, а дуга идёт из одной вершины в другую.



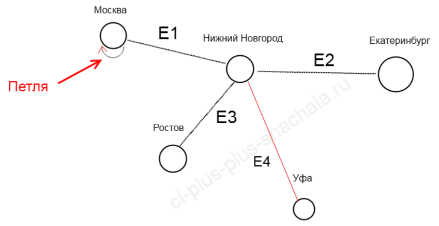
Граф, содержащий только дуги - ориентированный

На этом рисунке у графа только дуги. Дуги на графе обозначают только стрелочками, потому как ясно доступное направление. Если граф состоит из одних дуг, то такой граф называется ориентированным.



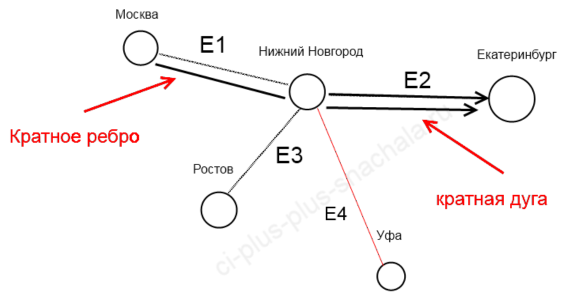
Граф, содержащий только ребра - неориентированный

На этом рисунке у графа одни только ребра. Ребра на графе обозначают обычными отрезками, хотя можно показать стрелочками, но сути это не изменит, потому как направление двустороннее. Такой граф называется неориентированным



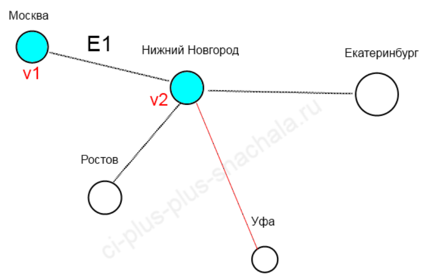
Дуга может выходить из одной вершины и приходить
в нее же. Такая дуга называется петлей

Иногда можно увидеть граф, в котором дорога ведет в ту же точку, откуда выходит. Такая дорога называется петлей. На рисунке изображена петля и понять что это, не должно быть сложно.



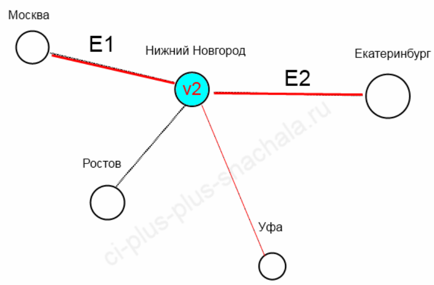
Вершины графа могут соединяться более чем одной дугой
одного направления и более чем одним ребром
такие дуги и ребра называются кратными

У графа могут быть два маршрута или более, которые начинаются в одной и той же вершине и заканчиваются в другой, но оба маршрута заканчиваются в одной и той же другой вершине. Рисунок скорее всего хорошо демонстрирует этот момент. Такие маршруты (дуги, ребра) называются кратными.



Вершины, соединенные ребром или дугой называют смежными
v1 и v2 - смежны

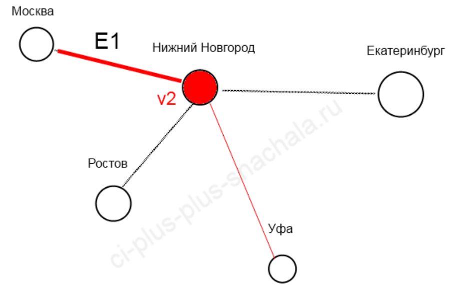
Вы часто будете встречать понятия смежности и инцендентности. На рисунке голубым цветом отмечены две вершины, которые соединены ребром друг с другом. Такие вершины называют смежными.



Ребра или дуги, имеющие одну общую вершину
называются смежными

E1 E2 смежны

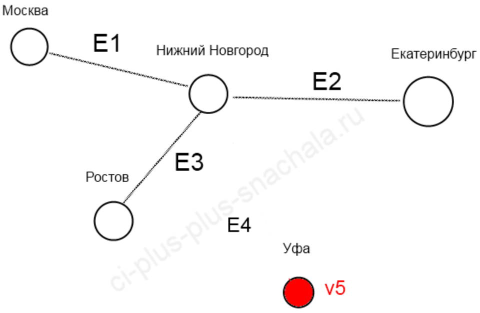
Вы часто будете встречать понятия смежности и инцендентности. На рисунке красным цветом отмечены два ребра, которые идут в одну точку. Такие ребра, как и вышеописанные вершины, тоже называются смежными.



Ребро (дуга) и любая принадлежащая сему вершина инцеденты

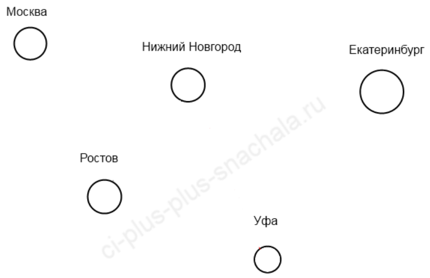
Ребро E1 инцедентно с вершиной v2

Вы часто будете встречать понятия смежности и инцендентности. Если объекты вершина и вершина однотипны, если объекты дорога и дорога однотипны, то объекты вершина и дорога не очень-то и однотипны, но чтобы обозначить связь вершины и дороги, существует понятие инцендентности. Т.е. это принадлежность вершины графа к маршруту графа, если маршрут принадлежит вершине графа (стыкуется с ней), то маршрут и вершина инцендентны.



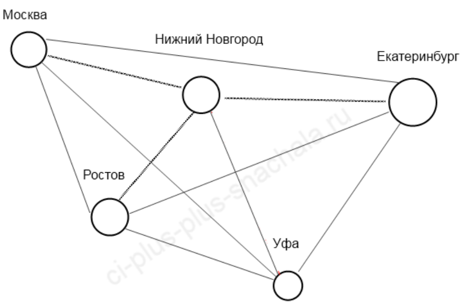
Вершина, не принадлежащая ни одному ребру называется изолированной. v5 изолирована

Так как в графе может существовать такая вершина, к которой нет маршрутов, то для такой вершины существует понятие — изолированная вершина.



Граф из одних только изолированных вершин называется нуль графом

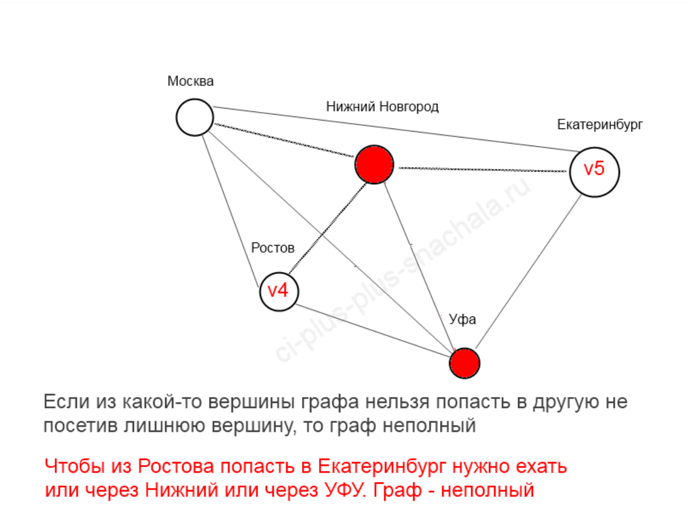
Этот рисунок уже был самым первым. Но для такой ситуации существует определение — нуль-граф.



Полный граф - это такой граф, в котором из любой вершины можно попасть в другую вершину "без проезда" по лишним вершинам

Прямая дорога из каждого города во все другие города

Для решения некоторых задач и для изучения примеров, нужно знать, что такое полный граф. Полный граф — это такой граф, из любой вершины которого существует прямая связь с любой и с каждой другой вершиной этого графа.



Если для какой-то из вершин не существует прямого маршрута хотя бы в одну из других вершин графа, то такой граф неполный.

Резерв. Учебник Григорьев, Сабурова Математика стр.314-315